МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕФЛЕКСИВНЫХ ПРОЦЕССОВ

РЕФЛЕКСИВНЫЙ АГЕНТ В ГРУППЕ

В.А. Лефевр *(США)*

Калифорнийский университет,
г. Ирвайн

В работе вводится модель агента, входящего в группу, члены которой способны оказывать влияние на его выбор. Агент обладает системой образов себя, которая предопределяется числом членов в группе и отношениями между ними. Модель позволяет предсказывать ограничения, накладываемые группой на выбор агента.

Введение

Мы строим модель рефлексирующего агента, включенного в группу из нескольких агентов. У агента есть система образов себя, структура которой предопределяется структурой группы. Далее эту систему мы будем называть интегральным образом себя. Модель основана на конструкции, описанной в двух наших предшествующих работах (Lefebvre, 1982, 2007), а также на работе Таран (Taran, 2001), в которой рефлексивная модель была распространена на булеву алгебру со многими элементами. Мы полагаем, что каждая пара агентов, входящих в группу, находится в состоянии либо союза (консенсус), либо конфронтации (отсутствие консенсуса). Мы полагаем также, что существует непустое множество действий, которые могут быть реализованы Агентом (мы пишем это слово с большой буквы, чтобы отличить Агента, модель которого мы строим, от других агентов).

Каждый из входящих в группу агентов склоняет Агента выбрать из множества действий некоторое подмножество. В частности, это подмножество может быть и пустым. Если некоторый агент склоняет Агента выбрать пустое подмножество, это означает, что воздействующий агент стремится удержать Агента от какого бы то ни было действия. В когнитивную сферу Агента заложено правило интеграции воздействий агентов группы. Итогом такой интеграции является подмножество, которое есть воздействие всей группы на Агента.

Агент обладает способностью генерировать интенции. Подмножество действий, которое Агент намерен выбрать, есть его интенция. Она может как зависеть, так и не зависеть от воздействий других агентов. Интенция рассматривается как самовоздействие. Мы назовем Агента интенциональным, если его выбор совпадает с его интенцией.

Интенциональному Агенту соответствует уравнение выбора. Каждое решение этого уравнения есть выбор подмножества действий. Такое уравнение может и не иметь решений. Это означает, что Агент не в состоянии ни произвести выбор, ни отказаться от выбора. Это уравнение может быть и таким, что любое подмножество действий (включая пустое) является его решением. В этом случае мы будем считать, что Агент обладает свободой выбора.

1. Множества

Рассмотрим непустое множество, которое далее будем называть универсальным, и обозначим его 1. Пусть M есть множество всех подмножеств этого множества, включая пустое, обозначаемое 0. Выражение $A \supseteq B$ означает, что B есть подмножество A. Выражение $A \supset B$ означает строгое включение B в A, т.е. $B \neq A$. Условимся операцию объединения двух множеств обозначать '+', а операцию пересечения '●'. Черта над буквой обозначает унарную операцию нахождения дополнительного множества, т.е. $\overline{A}$ есть множество элементов универсального множества, не входящих в A.

Для упрощения оперирования с множествами можно использовать диаграммы Венна. Например, на рис. 1.1 они приведены для объединения двух множеств, пересечения двух множеств и множества, дополнительного к данному.

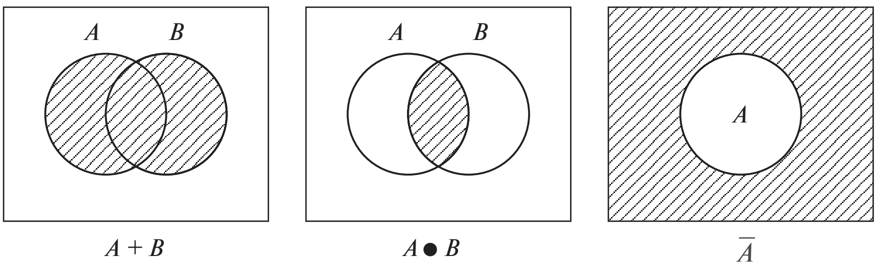


Рис.1.1. Диаграммы Венна.
Квадрат соответствует универсальному множеству. Заштрихованная часть – результат соответствующей операции.

Для операций +, ●, ‾ справедливы следующие соотношения:

1. $A + A = A$	2. $A \cdot A = A$
3. $A + B = B + A$	4. $A \cdot B = B \cdot A$
5. $A + (B + C) = (A + B) + C$	6. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
7. $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$	8. $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
9. $A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$	10. $A + 0 = A$
11. $A + 1 = 1$	12. $\overline{\overline{A}} = A$
13. $A + \overline{A} = 1$	14. $\overline{1} = 0$

На множестве M могут быть заданы функции вида $y = F(a_1, a_2, ..., a_k)$, принимающие значения из M, где переменные $a_1, a_2, ..., a_k$ определены на M. Далее мы будем рассматривать уравнение

$$f(x) = x, \tag{1.1}$$

представимое как

$$Ax + B\overline{x} = x, \tag{1.2}$$

где A и B не зависят от x. Оно имеет решения лишь при условии, что

$$A \supseteq B. \tag{1.3}$$

(см. *Taran, 2001*). Эти решения даются неравенствами

$$A \supseteq x \supseteq B. \tag{1.4}$$

Соотношения 1-14, приведенные выше, совпадают с системой аксиом для булевой алгебры. Поэтому, как хорошо известно, множество M с операциями +, ●, ‾ и отношением $\supseteq$ может быть рассмотрено как булева алгебра. Если универсальное множество состоит из одного элемента, α, то булева алгебра состоит из двух элементов: единицы, $1 = \{\alpha\}$, и нуля, $0 = \{\ \}$.

Если универсальное множество состоит из двух элементов – α, β, то булева алгебра состоит из четырех элементов, $1 = \{\alpha,\beta\}$, $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $0 = \{\ \}$. В общем, если универсальное множество состоит из k элементов, то соответствующая булева алгебра состоит из 2^k элементов.

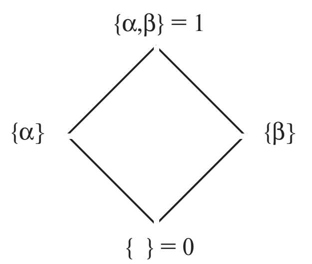


Рис. 1.2. Булева решетка, соответствующая универсальному множеству из двух элементов

Булевы алгебры удобно представлять в виде решеток (рис. 1.2 и 1.3).

Ребрам решеток соответствует отношение $A \supset B$, где B есть элемент, расположенный ниже на диаграмме.

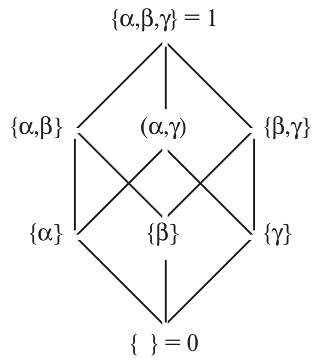


Рис. 1.3. Булева решетка, соответствующая универсальному множеству из трех элементов

Условимся представлять функцию

$$f(A,B) = A + \overline{B} \tag{1.5}$$

в экспоненциальной форме

$$f(A,B) = A^{B} \tag{1.6}$$

Легко видеть, что выполняются следующие равенства:

$$A^0 = 1$$
$$A^1 = A$$
$$A^B \bullet A^C = A^{B+C}$$
$$(A+B)^C = A^C + B^C$$
$$(A \bullet B)^C = A^C \bullet B^C$$

Условимся, что выражение $A^{B^{C}}$ означает $A^{\left(B^{C}\right)}$.

2. Полные графы и их декомпозиция

Граф называется полным, если он либо элементарен, т.е. состоит из одного узла, либо если каждая пара его узлов, *a* и *b*, соединена ребром (a,b). Ребра (a,b) и (b,a) эквивалентны. Мы разделяем все ребра неэлементарного полного графа на два непересекающихся множества (одно из которых может быть пустым) и называем эти множества отношениями R и $\overline{R}$. Если $(a,b) \in R$, то *a* и *b* связаны ребром R, что записывается как $a\ R\ b$. Если $(a,b) \in \overline{R}$, то *a* и *b* связаны ребром $\overline{R}$, что записывается как $a\ \overline{R}\ b$. Все последующие определения для R сохраняются и для $\overline{R}$.

Если каждый узел полного графа A связан с каждым узлом полного графа B ребром R, мы записываем это как ARB. Если полный граф G содержит подграфы $A_1, \ldots, A_n$, находящиеся попарно в отношении R, мы говорим, что граф G разделен на эти подграфы и $G = A_1RA_2R \ldots RA_n$. Полный граф, содержащий узлы $a,b,c,\ldots$, мы будем обозначать $<a,b,c,\ldots>$.

Мы называем полный граф G стратифицируемым по R, если $G = A\ R\ B$. Графы A и B мы называем стратами. Если граф A есть страта графа G по R и если граф A не стратифицируем по R, то A есть минимальная страта графа G по R. Страта, состоящая из одного узла, называется элементарной.

Полный граф G называется декомпозируемым, если каждый его неэлементарный подграф стратифицируем либо по R, либо по $\overline{R}$. Такой граф может быть разделен на минимальные страты по некоторому отношению R. Каждая полученная неэлементарная страта может быть разделена на свои минимальные страты по отношению $\overline{R}$. Эта процедура может повторяться до тех пор, пока среди минимальных страт не останется ни одной неэлементарной страты. Таким образом граф может быть представлен как дерево декомпозиции. Это дерево единственно, с точностью до нумерации ветвей (Lefebvre, 2001).

Не каждый полный граф с ребрами R и $\overline{R}$ может быть декомпозирован. Рассмотрим, например, граф (рис. 2.1).

Граф на рис.2.1 не может быть представлен ни как ARB, ни как $A\overline{R}B$, поскольку он двусвязен. Мы обозначим его S_4. Справедливо следующее утверждение: полный граф с двумя отношениями декомпозируем тогда и только тогда, когда среди его подграфов нет графа, изоморфного S_4 (см. Lefebvre, 2001). Это утверждение позволяет выяснить, является ли данный граф декомпозируемым. Заметим, что графы с двумя и тремя узлами всегда декомпозируемы.

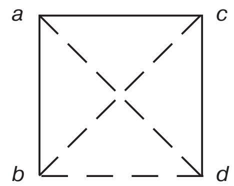


Рис. 2.1. Граф S_4. Сплошные линии соответствуют отношению R, а пунктирные – $\overline{R}$

3. Графы, каркасы и диагональные формы

Каждый декомпозируемый граф может быть представлен в виде линейной записи, состоящей из имен узлов, знаков R, $\overline{R}$ и скобок. Рассмотрим, например, граф на рис. 3.1. Пусть сплошные линии соответствуют отношению R, а пунктирные $\overline{R}$. Этот граф не изоморфен S_4. Поэтому он декомпозируем.

Его описывает линейная форма:

$$a\overline{R}(bR(c\overline{R}d)). \tag{3.1}$$

Она отражает следующие факты. Граф $< a,b,c,d >$ разделен на два подграфа $< a >$ и $< b,c,d >$. Эти подграфы являются минимальными стратами в отношении $\overline{R}$. Граф $< b,c,d >$ разделен на два подграфа: $< b >$ и $< c,d >$, которые являются минимальными стратами в отношении R. Наконец, граф $< c,d >$ разделен на минимальные страты $< c >$ и $< d >$ в отношении $\overline{R}$, которые далее уже неразделимы, поскольку они элементарны.

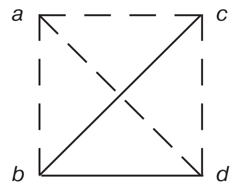


Рис. 3.1. Декомпозируемый граф

Знаки R и $\overline{R}$ в линейной записи могут быть заменены знаками ● и +. В результате получим запись, которую назовем каркасом полинома, или просто каркасом. Например, если заменить R знаком ●, а $\overline{R}$ знаком +, то линейная форма (3.1) будет соответствовать каркасу (3.2):

$$a + (b \bullet (c + d)) \tag{3.2}$$

Условимся при записи каркасов делать ряд упрощений. Выражение вида $[(A)]$ может быть заменено выражением [А]. Запись $(A \bullet B)$ может быть заменена записью $A \bullet B$ или AB. Условимся называть знак + сложением, а знак $\bullet$ – умножением. Каркас, соответствующий декомпозируемому графу G, представим либо как сумма, либо как произведение других каркасов, каждый из которых соответствует минимальной страте графа G по одному и тому же отношению R. Мы будем называть эти каркасы минимальными слагаемыми и минимальными множителями.

Слагаемое минимально тогда, когда оно не может быть представлено как сумма других слагаемых, а множитель минимален тогда, когда он не может быть представлен как произведение других множителей. Мы будем называть каркас элементарным, если он содержит только одну букву.

Перейдем теперь к построению лингвистических конструкций, которые мы назовем диагональными формами. Каждая из них строится на основании некоторого каркаса полинома. Процедура построения такова:

1. Помещаем каркас полинома в квадратные скобки.
2. Если каркас элементарен, процедура заканчивается.
3. Если каркас является суммой минимальных каркасов, мы пишем справа-наверху-наискосок минимальные слагаемые, помещенные в квадратные скобки и соединенные знаком +.
4. Если каркас является произведением минимальных каркасов, мы пишем справа-наверху-наискосок минимальные множители, помещенные в квадратные скобки и соединенные знаком $\bullet$.
5. Для каждого каркаса, записанного справа-вверх-наискосок, повторяем процедуру, начиная с пункта 2.
6. Диагональная форма построена, когда каждый неэлементарный каркас имеет диагональные элементы.

В качестве иллюстрации построим диагональную форму, соответствующую каркасу (3.2). Во-первых, упростим запись каркаса, после чего помещаем его в квадратные скобки:

$$[a + b\,(c + d)]. \tag{3.3}$$

Мы видим, что этот каркас есть сумма двух каркасов: a и $b\,(c + d)$, каждый из которых есть минимальное слагаемое, поскольку не может быть представлен как сумма других каркасов. Следующим шагом мы пишем справа-наверху-наискосок сумму двух минимальных слагаемых, заключенных в квадратные скобки:

$$\begin{array}{ll} & [a] + [b\,(c + d)] \\ [a + b\,(c + d)]. & \end{array} \tag{3.4}$$

На втором этаже есть два каркаса; первый, $[a]$, элементарен и не может быть представлен как сумма или произведение других каркасов, а второй может быть представлен как произведение $[b]\,[c + d]$. Написав это выражение справа-вверх-наискосок от выражения $[b\,(c + d)]$, получаем

$$\begin{array}{lll} & & [b]\,[c+d] \\ & [a]+[b\,(c+d)] & \\ [a+b\,(c+d)] & & \end{array} \quad . \tag{3.5}$$

Каркас $[b]$ элементарен, однако, каркас $[c + d]$ может быть представлен как $[c] + [d]$. В итоге мы получаем следующую диагональную форму:

$$\begin{array}{llll} & & & [c]+[d] \\ & & [b]\,[c+d] & \\ & [a]+[b\,(c+d)] & & \\ [a+b\,(c+d)] & & & \end{array} \quad . \tag{3.6}$$

Эта форма соответствует графу на рис. 3.1, если знак умножения обозначает сплошное ребро, а знак сложения - пунктирное.

4. Полиномы и диагональные формулы

Наделим теперь понятия каркаса и диагональной формы операциональным смыслом. Будем рассматривать каждую букву, входящую в каркас, как переменную, определенную на множестве M, где M есть множество всех подмножеств непустого универсального множества. Далее будем рассматривать знак ● как операцию пересечения двух множеств, а знак + как операцию объединения двух множеств. При такой интерпретации каркас превращается в некоторую функцию, представленную в виде полинома. Рассмотрим теперь каркас (3.2), полагая что он определен на множестве всех подмножеств универсального множества $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ (см. рис. 1.3). Пусть

$$a = \{\alpha\},\ b = 0,\ c = \{\alpha, \beta\},\ d = \{\beta, \gamma\}\ .$$

Подставив эти значения в (3.2) и совершив преобразования, находим

$$\{\alpha\} + 0\,(\{\alpha, \beta\} + \{\beta, \gamma\}) = \{\alpha\}\ . \tag{4.1}$$

Каркас, наделенный таким операциональным смыслом, будет называться полиномом. Диагональная форма теперь может быть рассмотрена как дерево полиномов. Зная значения букв, мы можем вычислить значения полиномов, расположенных на всех этажах. Отметим, что одна и та же буква, входящая в различные полиномы, может принимать различные значения. Чтобы превратить диагональную форму в инструмент вычисления, мы должны связать полиномы, лежащие на разных этажах. Заметим, что каждая диагональная форма, кроме элементарной, может быть представлена в виде укрупненного дерева, показанного на рис. 4.1. Корень этого дерева соответствует исходному полиному.

Белые кружочки соответствуют диагональным формам, чьи корни находятся на втором этаже. Эти формы связаны одним и тем же знаком (либо ●,

либо +). Пусть нам известно множество, соответствующее сумме или произведению форм. Обозначим это множество Q. Пусть P есть множество, соответствующее корню дерева, показанного на рис. 4.1. Мы полагаем, что диагональной форме соответствует множество

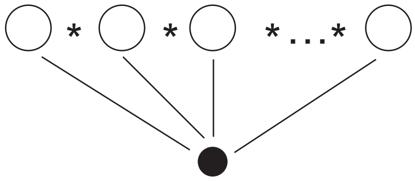


Рис. 4.1. Укрупненное дерево, соответствующее диагональной форме

$$R = P + \overline{Q}. \tag{4.2}$$

Теперь мы можем вычислить значение, соответствующее любой диагональной форме. Для этого мы должны начинать вычисление с элементарных форм, которым соответствуют узлы дерева, из которых не выходят ветви. Положим, например, что в выражении (3.6) a на первом этаже равно 1, а на втором 0; значения остальных букв равны $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$. После подстановки и вычислений получаем

$$\begin{matrix} & & & [0]+[1] \\ & & [1]\,[0+1] & \\ & [0]+[1\,(0+1)] & & \\ [1+1\,(0+1)] & & & \end{matrix} = 1\,. \tag{4.3}$$

Диагональную форму, для которой задано множество возможных значений переменных и определены операции, мы называем диагональной формулой. Относительно каждой переменной, входящей в диагональную формулу, может быть записано уравнение. Пусть, например, в выражении (3.6) переменная a есть неизвестная величина, $b = 1$, $c = 0$, $d = 0$. Рассмотрим уравнение

$$\begin{matrix} & & & [0]+[0] \\ & & [1]\,[0+0] & \\ & [a]+[1\,(0+0)] & & \\ [a+1\,(0+0)] & & & \end{matrix} = a\,. \tag{4.4}$$

После преобразований приходим к уравнению

$$a + \overline{a} = a\,, \tag{4.5}$$

из которого находим, что

$$a = 1\,. \tag{4.6}$$

В более сложных случаях следует использовать соотношение (1.4).

5. Моделирование Агента

Каждая диагональная формула имеет вид дерева, узлам которого соответствуют полиномы. Узлы дерева распределены по этажам. Мы полагаем, что все дерево соответствует Агенту. Деревья с корнями на втором этаже соответствуют образам себя у Агента. Деревья с корнями на третьем этаже соответствуют образам себя, которые есть у образов себя, и т.д. Значение формулы, соответствующей Агенту, есть выбор Агента. Значение формулы, соответствующей образу, есть выбор этого образа. Концы ветвей дерева, которым соответствуют полиномы, состоящие из одной буквы, мы будем называть примитивными образами себя. У этих образов нет образов себя. На первом этаже находится лишь один полином. Его значение есть воздействие всей группы на Агента, которое им не осознается. Значения полиномов, находящихся на втором этаже, есть воздействия на себя, с точки зрения Агента. Значения полиномов, находящихся на третьем этаже, есть воздействие на себя с точки зрения образов себя и т.д. Все образы себя принадлежат сфере сознания Агента. За такой интерпретацией стоит предположение, что в когнитивной системе Агента происходит разложение графа на минимальные страты. Как мы показали выше, минимальные страты связаны друг с другом каким-либо одним отношением. Мы также считаем, что образы себя связаны друг с другом тем же отношением, каким, с точки зрения Агента, связаны воздействующие на них страты.

Пусть $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ множество действий, которые может совершать Агент. Пусть M есть множество всех подмножеств этого множества. Множество M мы будем называть множеством альтернатив. Пусть также относительно каждого непустого $m \in M$ известно, совместимы ли все действия, входящие в него. Совместимость означает, что они могут быть реализованы одновременно. Мы считаем, что каждое действие совместимо с самим собой. Поэтому в любом множестве m есть непустое подмножество, состоящее из совместимых действий. Мы полагаем, что выбрав m, Агент способен реализовать любое непустое подмножество множества m, состоящее из совместимых действий.

Каждая из букв a, b, c, ... соответствует некоторому члену группы. Ее значение есть множество действий, к выбору которых данный член группы стремится склонить Агента в реальности, или с точки зрения Агента, или его образов себя; причем точка зрения Агента может отличаться от точек зрения его образов. Поэтому в различных полиномах диагональной формулы значения одной и той же буквы могут быть различными. Одна из букв всегда соответствует Агенту. Ее значение есть самовоздействие или интенция Агента выбрать определенное множество.

Перейдем теперь к интерпретации операций $\bullet$ и $+$. Выражение $b \bullet c$ означает, что агенты b и c находятся в союзе, и когнитивная система Агента «полагает», что между ними возникает консенсус, в результате которого появляется давление группы, состоящей из b и c, являющейся пересечением множеств, соответствующих b и c. Аналогично, выражение $B \bullet C$ интерпретируется как союз между группами B и C.

Выражение $b + c$ означает, что агенты b и c находятся в конфликте, и группа, состоящая из этих агентов, склоняет Агента выбрать множество действий, которое является объединением множеств, соответствующих b и с. Выражение $B + C$ интерпретируется как конфликт между группами B и C.

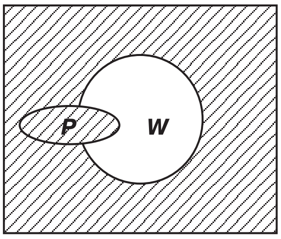
Агент, его непримитивные образы себя, а также непримитивные образы себя, которые есть у образов, могут быть представлены в виде выражения (5.1):

$$q = P^W = P + \overline{W}\,, \tag{5.1}$$

где

$$W = A_1 * A_2 * \ldots * A_k\,, \tag{5.2}$$

* есть либо ●, либо +; P – воздействие группы на Агента; W – система образов себя; A_i – отдельные образы себя. Каждый образ себя, A_i, есть агент, и он способен совершать выбор элемента из M. Группа образов себя, находящихся в попарных отношениях ● или +, может быть рассмотрена как интегральный образ себя, способный к выбору. Переменная W (см. 5.2) представляет множество действий, которое выбирает интегральный образ себя. Функции (5.1) соответствут следующая диаграмма Венна (рис. 5.1). Обоснование использования именно этой функции дается в разделе 8.



$q = P + \overline{W}$

Рис. 5.1. Выбор Агента. Множество, которое соответствует его выбору, заштриховано

Предположим, что на всех этажах своей рефлексии Агент правильно отражает воздействия других агентов, поэтому значение одной и той же буквы во всех полиномах, входящих в формулу, одно и то же.

Агент может быть представлен как функция

$$y = \Phi\,(a, b, c, \ldots)\,, \tag{5.3}$$

где значение a представляет самовоздействие или интенцию. Это то множество действий, которое Агент намерен выбрать. В модели, которую мы построили к этому моменту, множества a и y могут быть различны. Это означает, что выбор Агента может не совпадать с его интенцией (намерением). Сделаем теперь следующий шаг. Назовем выбор Агента интенциональным, если $a = y$, т.е. Агент совершает именно тот выбор, который желает совершить. Такому выбору соответствует уравнение

$$a = \Phi\,(a, b, c, \ldots)\,. \tag{5.4}$$

При заданных значениях $b, c, \ldots$ интенциональный выбор возможен лишь тогда, когда уравнение (5.4) имеет по крайней мере одно решение. Далее будем анализировать Агента, стремящегося совершать интенциональный выбор.

6. Примеры анализа

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть a — сын, b — отец, c — мать. У сына отличные отношения и с отцом, и с матерью, которые находятся в конфликте между собой. Сын собирается жениться и может выбрать либо девушку Альфа, либо девушку Бета, но может и не жениться.

Пусть действие α есть женитьба на Альфе, а действие β — женитьба на Бете. Универсальное множество в этом случае есть $\{\alpha, \beta\}$. Множество альтернатив M есть множество всех подмножеств универсального множества:

$$M = \{\{\alpha, \beta\}, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\,\}\}. \tag{6.1}$$

Множество M представлено в виде решетки на рис. 6.1. Группе, состоящей из сына, отца и матери, соответствует граф на рис. 6.2. Поскольку он имеет три узла, он декомпозируем.

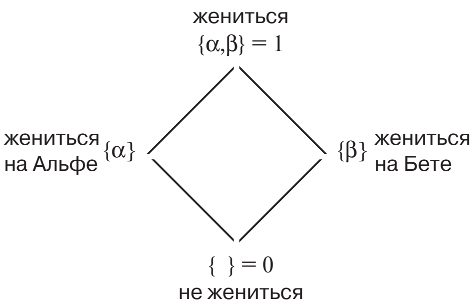


Рис. 6.1. Булева решетка альтернатив

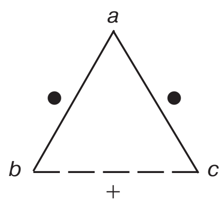


Рис. 6.2. Граф отношений. Сын (a) в союзе с отцом (b) и с матерью (c). У отца с матерью конфликт

Этому графу соответствует полином

$$a\,(b + c)\,. \tag{6.2}$$

Построим диагональную формулу и запишем уравнение интенционального выбора для a:

$$[a\,(b + c)^{[a]\,[b + c]^{[b] + [c]}} = a\,. \tag{6.3}$$

Значения b и c из множества (6.1) есть давления отца и матери на сына с целью склонить его произвести тот или иной выбор.

Уравнение (6.3) после преобразований может быть записано как

$$(b + c)a + 1\overline{a} = a\,\cdot \tag{6.4}$$

Исследуем это уравнение (см. 1.3). Оно имеет решения лишь при условии, что

$$(b + c) \supseteq 1. \tag{6.5}$$

Такое возможно, лишь если $(b + c) = 1$. Пусть, например, отец склоняет сына жениться на Альфе, а мать на Бете. В этом случае $b = \{\alpha\}$, $c = \{\beta\}$, $(b + c) =$ $= \{\alpha\} + \{\beta\} = 1$. В силу соотношения (1.4)

$$1 \supseteq a \supseteq 1, \tag{6.6}$$

т.е. сын принимает решение жениться. Но поскольку $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$ несовместимые действия, сын должен еще совершить выбор между ними. Этот выбор не может быть предсказан на основе нашего знания о влиянии на сына со стороны матери и отца.

Рассмотрим случай, когда и отец, и мать советуют сыну не жениться вообще. Тогда $(b + c) = 0$ и условие (6.5) не выполняется, уравнение (6.4) не имеет решений, из чего следует, что при этих воздействиях интенциональный выбор невозможен, и сын находится в состоянии фрустрации.

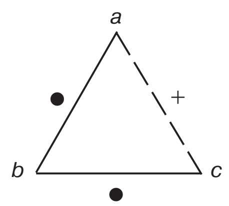


Рис. 6.3. Граф отношений. У сына (*a*) хорошие отношения с отцом (*b*) и плохие с матерью (*c*). У отца с матерью хорошие отношения

Проанализируем другой вариант отношений между сыном и родителями. У сына конфликт с матерью, а у отца хорошие отношения как с матерью, так и с сыном. Этой ситуации соответствует граф на рис. 6.3. Графу соответствует следующее уравнение интенционального выбора:

$$[b\,(a + c)]^{[b]\,[a + c]^{[a] + [c]}} = a\,. \tag{6.7}$$

После упрощений уравнение может быть записано как

$$1a + (\bar{b} + c)\bar{a} = a\,\cdot \tag{6.8}$$

Поскольку $1 \supseteq (\bar{b} + c)$, это уравнение имеет решение при любых значениях b и c. Например, $b = \{\alpha, \beta\}$ и $c = \{\alpha\}$, т.е. отец склоняет сына жениться, а мать уточняет, чтобы сын женился на Альфе. В этом случае

$$1 \supseteq a \supseteq \{\alpha\}, \tag{6.9}$$

и у сына есть две возможности: либо принять решение жениться обязательно, $\{\alpha, \beta\}$, либо жениться именно на Альфе, $\{\alpha\}$.

Пусть $b = 1$, а $c = 0$, т.е. отец советует жениться, а мать – оставаться холостым. Этому случаю соответствует неравенство

$$1 \supseteq a \supseteq 0, \tag{6.10}$$

т.е. сын может выбрать любой элемент множества *M*. Мы будем полагать, что в таких случаях Агент обладает свободой выбора.

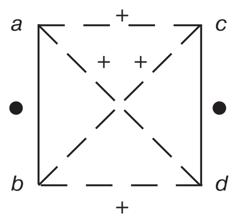


Рис. 6.4. Агенты *a* и *b* находятся в союзе друг с другом и в конфликте с агентами *c* и *d*, которые находятся в союзе

Рассмотрим теперь другой пример. Пусть группа, членом которой является Агент, представима графом (рис. 6.4).

Граф на рис. 6.4. декомпозируем, поскольку он не изоморфен графу S_4. Агенту в этом примере соответствует следующее уравнение интенционального выбора:

$$[ab + cd]^{[a\,b]^{[a]\,[b]} + [c\,d]^{[c]\,[d]}} = a. \quad (6.11)$$

Оно может быть записано как

$$(b + cd)a + cd\overline{a} = a\,. \quad (6.12)$$

Поскольку

$$(b + cd) \supseteq cd, \quad (6.13)$$

уравнение (6.12) всегда имеет решения, которые удовлетворяют неравенствам

$$(b + cd) \supseteq a \supseteq cd. \quad (6.14)$$

Положим, что ситуация такова. Агент (*a*), назовем его Питер, должен принять на работу новых сотрудников. Есть заявления от Альфы, Беты и Гаммы. Действие α означает нанять Альфу, β – нанять Бету и γ – нанять Гамму. Питер может либо нанять их всех, либо любых двух, либо одного, либо не нанимать никого. Мы видим, что действия α, β и γ в этом случае совместимы. Универсальное множество есть $\{\alpha,\beta,\gamma\}$. Ему соответствует булева решетка на рис. 1.3. Предположим, что агенты *b*, *c* и *d* влияют на выбор Питера, их влияния соответствуют значениям переменных *b*, *c* и *d*.

Пусть, например, агент *b* советует нанять Альфу, агент *c* – Бету, и агент *d* – Гамму, т.е. $b = \{\alpha\}$, $c = \{\beta\}$, $d = \{\gamma\}$. Подставляя эти значения в (6.14), находим, что

$$\{\alpha\} \supseteq a \supseteq 0. \quad (6.15)$$

Глядя на булеву решетку на рис.1.3, видим, что неравенству (6.15) удовлетворяют две альтернативы:

$$\{a\} \text{ и } \{\,\} = 0. \quad (6.16)$$

Таким образом, Питер может либо последовать совету агента *b,* с которым он в союзе, либо отказаться от выбора.

В заключение этого раздела отметим, что если бы агенты *b*, *c* и *d* склоняли Питера выбрать какого-либо одного кандидата, скажем Альфу, то уравнение (6.14) приобрело бы вид

$$\{\alpha\} \supseteq a \supseteq \{\alpha\}, \quad (6.17)$$

из чего следует, что Питер выберет именно того кандидата, которого ему рекомендуют выбрать другие члены группы.

7. Случай недекомпозируемого графа

В рассмотрении, проведенном выше, мы предполагали, что граф отношений между агентами декомпозируем. Чтобы распространить теорию на недекомпозируемые графы, предположим, что Агент способен расположить всех других агентов в порядке значимости для себя. Например, агент *b* более значим для него, чем агент *c*, агент *c* более значим, чем *d*, и т.д. Поскольку число агентов конечно, то у Агента всегда есть наименее значимый партнер. Представим себе, что Агент включен в граф, который недекомпозируем. В этом случае он удаляет незначимых для него агентов по одному, проверяя после каждого удаления, не стал ли граф декомпозируемым. Такая процедура всегда приводит к успеху, поскольку граф с тремя узлами декомпозируем.

Рассмотрим пример. Пусть граф отношений между агентами имеет следующий вид (см. рис. 7.1).

Этот граф изоморфен S_4, т.е. недекомпозируем.

Пусть для Агента (*a*) порядок значимости других агентов такой: *b*, *c*, *d*. Наименее значимым является *d*, и он удаляется. В результате получается граф из трех узлов < *b*, *a*, *c* >, который декомпозируем, и анализ которого был проведен в предыдущем разделе.

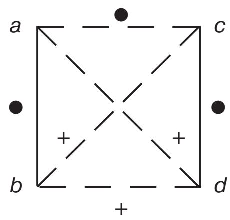


Рис. 7.1. Недекомпозируемый граф отношений между *a*, *b*, *c* и *d*

8. Функция выбора Агента

Рассмотрим произвольную булеву решетку (примеры даны на рис. 1.2 и 1.3). Она имеет два полюса, которым соответствуют множества $1 = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$ и $0 = \{\,\}$.

Будем считать, что множество 1 олицетворяет для Агента активность, а множество 0 – пассивность. Выражение $m_1 \supset m_2$ мы будем интерпретировать как отношение «m_1 активнее m_2». Таким образом мы определили на булевой решетке отношение активности. Рассмотрим теперь функцию

$$q = f(P, W)\,, \tag{8.1}$$

где q, P и W определены на множестве M, представимую как

$$f(P,W) = AP + B\overline{P} + CW + D\overline{W}\,, \tag{8.2}$$

где A, B, C и D не зависят от P и W. В этом соотношении P интерпретируется как множество, к выбору которого группа склоняет Агента, а W – как интегральный образ себя.

Далее мы вводим две аксиомы:

$$f(P,0) = 1. \tag{8.3}$$

$$f(P,1) = P. \tag{8.4}$$

Аксиома (8.3) истолковывается так: если Агент видит себя пассивным, он испытывает «импульс вины» и становится активным. Истолкование аксиомы (8.4) следующее: если Агент видит себя активным, он испытывает «импульс успокоения», и любой толчок извне, в том числе в сторону пассивности, превращается в его выбор. Подставляя значения P и W, равные 0 и 1 в уравнение (8.2), получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} f(1,0) &= A + D = 1 \\ f(0,0) &= B + D = 1 \\ f(1,1) &= A + C = 1 \\ f(0,1) &= B + C = 0\ . \end{aligned} \tag{8.5}$$

Решая эту систему, находим, что $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1$. Подставив эти значения в (8.2), окончательно получаем:

$$f(P,W) = P + \overline{W}\,. \tag{8.6}$$

Множество, которое выбирает Агент состоит из объединения двух множеств: $\overline{W}$ - множества всех действий, из которого удалены действия, входящие в W, и множества P, состоящее из действий, к выбору которых Агента склоняет группа. Мы видим, что действие, входящее в W, может принадлежать q лишь при условии, что оно принадлежит пересечению PW.

Заключение

В рамках модели, введенной в этой работе, влияние группы не детерминитует полностью выбор Агента. В некоторых случаях он может даже обладать свободой выбора. Однако группа способна накладывать существенные ограничения на выбор Агента. Зная эти ограничения, мы можем во многих случаях отбросить значительнуию часть вариантов, т.е. с большей достоверностью предсказывать выбор Агента.

Автор выражает глубокую благодарность Викторине Лефевр за неоценимую помощь, а также благодарит Стефана Шмидта и Тима Кайзера за ценные советы.

Библиография

Lefebvre, V. A. Algebra of Conscience. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1982. 2nd enlarged edition (includes a new second part, “Moral Choice,” not published before), Dordrecht: Kluwer, 2001. Алгебра совести, расширенный перевод 2-го английского издания, Москва: Когито-Центр, 2003.

Lefebvre, V. A. Reflexive Analysis of Groups. In: Newton Howard and Ammar Qusaibaty (Eds.) *Mathematical Models for Counterterrorism*, Springer (in press).

Taran, T. A. Many-valued Boolean Model of the Reflexive Agent. *Multi-Valued Logic*, 2001, Vol. 7, pp.97-127.